

Statistiques - Fiche d'exercices n°1

À rendre le lundi 09/03 avant votre TD, à l'adresse : gaspardabel@gmail.com

-> si vous n'arrivez pas à faire tous les exercices, aucun problème, mais envoyez vos pistes de réflexion (au propre si possible).

Exercice 1:

I. On tire au but avec une probabilité de succès de $2/5$. Soit X une variable aléatoire égale à 1 dans le cas d'un succès et de 0 dans le cas contraire. Quelle est la loi de X ? Calculer la valeur moyenne et la variance de X .

II. On tire au but trois fois indépendamment avec une probabilité de succès de $2/5$. Soit Y la variable aléatoire "le nombre de succès dans la série de trois tirs".

- Déterminer Ω , la probabilité des événements élémentaires $P(\omega_i)$.
- Déterminer les événements $A_k = \{Y = k\}$, puis calculer $P(A_k) = p_k$.
- Calculer la moyenne EY et la variance $Var(Y)$.
- Calculer la probabilité conditionnelle $P(Y = 1 | Y \geq 1)$.

III. Montrer qu'il existe trois variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi de Bernoulli telles que $Y = X_1 + X_2 + X_3$. Quelle est la loi de Y ? Calculer $P(Y = k)$, $k = 0, 1, 2, 3$. Que peut-on dire dans le cas général donné par $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$?

Exercice 2:

On jette un dé équilibré de 6 faces. Soit X la variable aléatoire "le rang de la première apparition de 6". Quelle est la loi de X ?

- Déterminer EX , $Var(X)$.
- Calculer $P(X = 1)$, $P(X = 2)$, $P(X > 1)$, $P(X > 2)$, puis $P(X > 2 | X > 1)$.

Statistiques - Fiche d'exercices n°1

Rappel : • Pour tout type de variable aléatoire $X_1, X_2, \dots, X_n, n \in \mathbb{N}^*$
 $\forall a, b \in \mathbb{R}, \begin{cases} \mathbb{E}[X_1 + X_2 + \dots + X_n] = \mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2] + \dots + \mathbb{E}[X_n] \\ \mathbb{E}[aX_1 + b] = a\mathbb{E}[X_1] + b \end{cases}$

• $V(aX_1 + b) = a^2 V(X_1)$

• Si les v.a. $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes :

$$\mathbb{E}[X_1 \times X_2 \times X_3 \times \dots \times X_n] = \mathbb{E}[X_1] \times \mathbb{E}[X_2] \times \dots \times \mathbb{E}[X_n]$$

$$V(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \dots + V(X_n)$$

Exercice 3 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires, mutuellement indépendantes, telles que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\begin{cases} \mathbb{E}[X_i] = \mu \\ V(X_i) = \sigma^2 \end{cases}$

①

Soit $t_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$

a) Quel est le type d'objet de t_n ? (Réel, fonction, variable aléatoire, ...)

b) Calculer $\mathbb{E}[t_n]$

c) Calculer $V(t_n)$

d) Quelle est la limite de $V(t_n)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$? Interpréter

②

Soit $\Theta_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - t_n)^2$

a) Montrer que $\Theta_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - t_n^2$

b) Montrer que $\mathbb{E}[\Theta_n] = \mathbb{E}[X_1^2] - \mathbb{E}[t_n^2]$

c) En faisant apparaître deux termes judicieusement choisis, écrire $\mathbb{E}[\Theta_n]$ avec $V(X)$ et $V(t_n)$.

d) Montrer enfin que $\mathbb{E}(\Theta_n) = \frac{n-1}{n} \sigma^2$

Statistiques - Fiche d'exercices n°1

Exercice 4:

Dans une unité industrielle, on contrôle régulièrement les fumées rejetées. On considère les concentrations en soufre (en mg/m^3) suivantes correspondantes à un certain nombre de ces analyses:

3.94	4.06	4.28	3.99	3.74	4.08	4.76	4.62	4.53	4.35	3.99	4.22	3.96
------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------

Quelle est la nature de cette variable: quantitative, qualitative, nominale, ordinale, discrète, continue?

1. Calculer la moyenne empirique $\bar{X}$ et la variance empirique $\text{Var}(X)$ pour ces données.
2. Calculer la médiane et les deux quartiles de cette série.
3. Calculer les déciles D_1 et D_9 . Construire le diagramme de Tukey pour ces données.

Sous-titre